**Опр. 2** **Ограниченным** наз-ся мн-во $A$, если $\exists R>0$, т.ч. $A\subset B_R(O)$, $O=(0,0,0)$. **Телом** будем называть произвольное ограниченное мн-во $F\subset\mathbb{R}^3$.

Из опр-я $\Rightarrow$ $\forall$ тела $F$ сущ-т $V^*(F)$ и $V_*(F)$, причем $V_*(F)\le V^*(F)$.

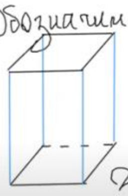
**Опр. 5** Тело $F$ наз-ся кубируемым, если $V_*(F)=V^*(F)$. Объемом кубируемого тела $F$ наз-ся величина
$$V(F):=V_*(F)=V^*(F).$$

**Лемма 1** Тело $F$ кубируемо $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists P,Q$ – простейшие тела, т.ч. $P\subset F\subset Q$, причем $V(Q)-V(P)<\varepsilon$.

**Лемма 2** Тело $F$ кубируемо $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists F_1,F_2$ – кубируемые, т.ч. $F_1\subset F\subset F_2$, причем $V(F_2)-V(F_1)<\varepsilon$.

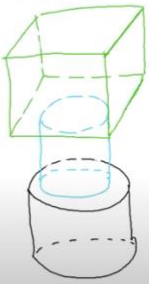
**Д-ва** лемм 1 и 2 полностью аналогичны д-вам лемм 1 и 2 предыдущей лекции.

**Д-во**: Возьмем $\varepsilon>0$. Фигура $F$ квадр-ма $\Rightarrow$ $\exists P,Q$ – простейшие, т.ч. $P\subset F\subset Q$ и $S(Q)-S(P)<\frac{\varepsilon}{h}$.
Обозначим $C_P=P\times[z_1,z_2]$; $C_Q=Q\times[z_1,z_2]$.



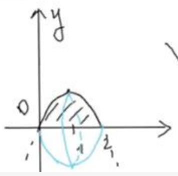
Тогда $C_P$, $C_Q$ – простейшие тела; $C_P\subset C\subset C_Q$; $V(C_Q)-V(C_P)=S(Q)\cdot h-S(P)\cdot h<\varepsilon$. Значит, тело $C$ кубируемо (лемма 1).
Далее,
$$\left.\begin{array}{c} V(C_P)\le V(C)\le V(C_Q)\\ \parallel \qquad\qquad\qquad \parallel\\ S(P)\cdot h\le S(F)\cdot h\le S(Q)\cdot h\end{array}\right\}\Rightarrow \underbrace{|V(C)-S(F)\cdot h|<\varepsilon}_{\text{не зав-т от }\varepsilon}\Rightarrow V(C)=S(F)\cdot h.$$
ч.т.д.

**Опр. 7** Ступенчатым назовем тело, представляющее собой конечное объединение цилиндров, "поставленных" друг на друга (т.е. любые 2 цилиндра могут пересекаться только по части оси $z$)



**Следствие**: Если все основания цилиндров, образующих ступенчатое тело, квадрируемы, то тело $C$ кубируемо, причем
$$V(C)=\sum_{k=1}^{n}V(\underset{\text{цилиндры}}{C_k})$$

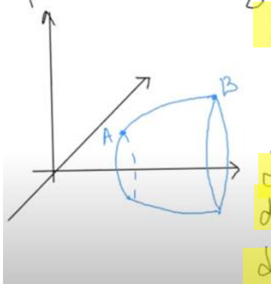
**Пример**. Трапеция ограничена: $y=2x-x^2$ и $y=0$. $V_{Ox}=?$



$$V_{Ox}=\pi\int_0^2(2x-x^2)^2\,dx=\pi\int_0^2(4x^2-4x^3+x^4)\,dx=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2=\pi\left(\frac{32}{3}-16+\frac{32}{5}\right)=$$

Для вращения вокруг оси $Oy$ криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, $f\in C[a,b]$, $f(x)\ge 0$ $\forall x\in[a,b]$, справедлива формула (без д-ва):
$$V_{Oy}=2\pi\int_a^b x f(x)\,dx$$

Площадь поверхности, образ-й при вращении кривой $L$ вокруг оси $Ox$:
$$S=2\pi\int_A^B|y|\,ds.$$



$|y|$ – расстояние до оси вращения; $ds$ – дифференциал дуги.

$ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$; $|y|=|y(t)|$

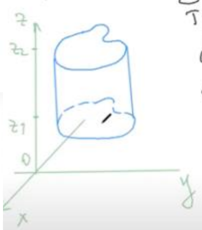
$ds=\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$; $|y|=|f(x)|$

$ds=\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi$; $y=r|\sin\varphi|$

**Опр. 3** **Простейшими** будем называть тела, представляющие собой конечные объединения прямоугольных параллелепипедов со сторонами, параллельными коорд-м осям (считаем, что любые 2 парал-да могут пересекаться только по части границы).
Объем простейшего тела $P$ будем обозначать $V(P)$.

**Опр. 4** Пусть $F$ – произвольное тело. Его верхним (нижним) объемом наз-ся $V^*(F)=\inf\limits_{Q\supset F}\{V(Q)\}$ ($V_*(F)=\sup\limits_{P\subset F}\{V(P)\}$), где inf взят по всем простейшим телам, содержащим $F$; sup – по всем простейшим, содержащимся в $F$.

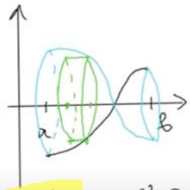
**Опр. 6** **Цилиндрическим телом (цилиндром)** будем называть тело $C=F\times[z_1,z_2]$, где $F$ – плоская фигура, лежащая в $Oxy$, $[z_1,z_2]$ – отрезок оси $Oz$ (может так ввести систему коор-т).



Фигура $F$ наз-ся основанием цилиндра $C$; отрезок $[z_1,z_2]$ – образующей; число $h=z_2-z_1$ – высотой.

**Т. 1** Если основание цилиндра $C$ – квадрируемая фигура $F$, то цилиндр кубируем и $V(C)=S(F)\cdot h$.

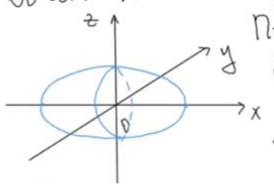
**Т. 2** Пусть тело $F$ образовано при вращении вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции, ограниченной графиком $y=|f(x)|$, $a\le x\le b$, $f\in C[a,b]$.



Тело $F$ кубируемо, причем
$$V(F)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$
$m_k=\inf\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k}|f(x)|$

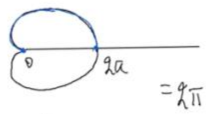
**Д-во**: $\pi f^2\in R[a,b]$ (т.к. непр-на). Возьмем $\varepsilon>0$. $\exists T=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ – разбиение $[a,b]$, т.ч. $S_{\pi f^2}(T)-s_{\pi f^2}(T)<\varepsilon$.
С другой стороны, $s(T)=\sum\limits_{k=1}^{n}\underbrace{\pi m_k^2}_{\text{осн-я}}\cdot\underbrace{\Delta x_k}_{\text{высота}}=\sum\limits_{k=1}^{n}V(P_k)=V(P)$,
где $P=\bigcup\limits_{k=1}^{n}P_k$; $P_k$ – цилиндры радиуса $m_k$ и высоты $\Delta x_k$.
Аналогично $S(T)=V(Q)$, где $Q=\bigcup\limits_{k=1}^{n}Q_k$; $Q_k$ – цилиндры радиуса $M_k$ и высоты $\Delta x_k$.
По построению $P\subset F\subset Q$; $P,Q$ – ступенчатые $\Rightarrow$ кубируемые; $V(Q)-V(P)=S(T)-s(T)<\varepsilon$.
Значит, тело $F$ кубируемо (лемма 2).
Далее,
$$\left.\begin{array}{c} s(T)\le \int_a^b\pi f^2(x)\,dx\le S(T)\\ \parallel \qquad\qquad\qquad \parallel\\ V(P)\le V(F)\le V(Q)\end{array}\right\}\Rightarrow V(F)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$
ч.т.д.

Объем тела по известным площадям сечений (без д-ва)



Пусть $a\le x\le b$; для каждого $x$ известна $S(x)$ – площадь сечения тела плоскостью $\perp$ оси $Ox$.
Тогда $V=\int_a^b S(x)\,dx$.

**Пример**: $r=a(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси



$$S=2\pi\int_0^\pi r\sin\varphi\cdot\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi=$$
$$=2\pi\int_0^\pi a(1+\cos\varphi)\cdot\sin\varphi\cdot a\cdot\sqrt{1+\cos^2\varphi+2\cos\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi$$
$$=2\pi a^2\int_0^\pi(\sin\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)\cdot\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=4\pi a^2\int_0^\pi\Big(\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}+$$
$$+\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\Big)d\varphi=4\pi a^2\int_0^\pi\Big(2\sin\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}+2\sin\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\Big(2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1\Big)\Big)d\varphi$$
$$=16\pi a^2\int_0^\pi\sin\frac{\varphi}{2}\cos^4\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=-32\pi a^2\int_0^\pi\cos^4\frac{\varphi}{2}\,d\cos\frac{\varphi}{2}=-\frac{32\pi a^2}{5}\cdot(-1)=\frac{32}{5}\pi a^2$$